

**Г.В. Недугов**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУПА**

*Монография*

Казань  
Издательство «Бук»  
2021

УДК 340.62:343.148.23  
ББК 58.1:67.410.204.15  
Н42

**Рецензенты:**

Вавилов Алексей Юрьевич, доктор медицинских наук, профессор  
(Ижевская государственная медицинская академия)  
Мальцев Алексей Евгеньевич, доктор медицинских наук, профессор  
(Кировский государственный медицинский университет)

**Недугов, Герман Владимирович.**

Н42 Математическое моделирование охлаждения трупа : монография / Г. В. Недугов. — Казань : Бук, 2021. — 198 с. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-00118-790-5.

В монографии дано систематизированное изложение принципов математического моделирования охлаждения трупа в аспекте определения давности наступления смерти. Структура книги включает описание закона охлаждения поверхностей физических тел Ньютона — Рихмана и базирующиеся на нем математические модели определения давности наступления смерти и оценки его погрешностей в условиях постоянной и изменяющейся температуры окружающей среды. Охарактеризована двойная экспоненциальная модель Marshall — Ноаге и ее модификации С. Henßge, включая модели, учитывающие линейные и однократные дискретные изменения температуры внешней среды. Приведены методы построения регрессионных моделей охлаждения трупа, а также регрессионные подходы к оценке констант охлаждения и температурного плато модели Marshall — Ноаге и ее модификаций Henßge. Предложены численные алгоритмы решения неявно заданных функций охлаждения трупа, основанные на методах Ньютона и хорд. Дано описание новейших прикладных компьютерных программ определения давности наступления смерти серии Warm Bodies. Рассмотрены методы определения давности наступления смерти на основе теории теплообмена. Намечены перспективы дальнейшего развития методов математического моделирования охлаждения трупа.

Монография предназначена для ординаторов, судебно-медицинских экспертов и преподавателей судебной медицины, а также может быть полезной специалистам, применяющим методы математического моделирования в биомедицине.

УДК 340.62:343.148.23  
ББК 58.1:67.410.204.15

ISBN 978-5-00118-790-5

© Недугов Г. В., 2021

**G.V. Nedugov**

**MATHEMATICAL MODELING  
OF THE CORPSE COOLING**

Monography

Kazan  
Buk  
2021

УДК 340.62:343.148.23

ББК 58.1:67.410.204.15

H42

**Reviewers:**

A. Yu. Vavilov, Head of the Department of Forensic Medicine of the Izhevsk State Medical Academy of the Ministry of Health of the Russian Federation Corresponding Member of RANH, PhD, Professor

A. E. Maltsev, Head of the Department of Forensic Medicine of the Kirov State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation PhD, Professor

**Nedugov, German Vladimirovich.**

H42 Mathematical modeling of the corpse cooling : monography / G. V. Nedugov. — Kazan : Buk, 2021. — 198 c. — Text: direct.

ISBN 978-5-00118-790-5.

The monograph provides a systematic presentation of the principles of mathematical modeling of corpse cooling in the aspect of determining the postmortem interval. The structure of the monograph includes a description of the Newton's — Richman's cooling law on the surfaces of physical bodies and mathematical models based on it for determining and estimating errors of the postmortem interval in conditions of constant and changing ambient temperature. The double exponential Marshall — Hoare model and its modifications by C. Henssge are characterized, including models that take into account one-time sudden changes in the ambient temperature. Methods for constructing regression models of corpse cooling, as well as regression approaches to estimating the cooling constants and the temperature plateau of the Marshall — Hoare model and its Henssge modifications, are presented. Numerical algorithms for solving implicitly defined functions of corpse cooling based on the Newton and Chord methods are proposed. The description of the latest applied computer programs of the Warm Bodies series for determining the postmortem interval is given. Methods for determining the postmortem interval on the basis of the theory of heat transfer and the boundary value problem of thermal conductivity are considered. Prospects for further development of methods of mathematical modeling of corpse cooling are mentioned.

The monograph is intended for residents, forensic medical experts and teachers of forensic medicine, and can also be useful for specialists who apply mathematical modeling methods in biomedicine.

УДК 340.62:343.148.23

ББК 58.1:67.410.204.15

ISBN 978-5-00118-790-5

© Nedugov G. V., 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	7
<b>ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУПА НА ОСНОВЕ ЗАКОНА НЬЮТОНА-РИХМАНА</b> .....	11
1.1. Закон охлаждения Ньютона-Рихмана .....	11
1.2. Простая экспоненциальная модель охлаждения трупа .....	15
1.3. Аппроксимации охлаждения ядра трупа на основе простой экспоненциальной модели .....	22
1.4. Линейная модель охлаждения трупа .....	26
1.5. Математическая модель охлаждения тела на основе закона Ньютона-Рихмана в условиях линейно изменяющейся температуры внешней среды .....	30
1.6. Математическая модель охлаждения трупа на основе закона Ньютона-Рихмана в условиях нелинейной динамики температуры внешней среды .....	38
1.7. Математическая модель погрешностей определения давности наступления смерти на основе закона охлаждения Ньютона-Рихмана при постоянной температуре внешней среды .....	47
1.8. Математическая модель погрешностей определения давности наступления смерти на основе закона охлаждения Ньютона-Рихмана в условиях изменяющейся температуры окружающей среды .....	54
<b>ГЛАВА 2. ДВОЙНАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУПА</b> .....	67
2.1. Двойная экспоненциальная модель Marshall-Noare .....	67
2.2. Двойная экспоненциальная модель охлаждения трупа в модификации Henßge .....	73
2.3. Погрешности двойных экспоненциальных моделей охлаждения трупа .....	79
2.4. Номограммы Henßge .....	85
2.5. Оценка давности наступления смерти по методу Henßge при внезапных изменениях температуры внешней среды .....	97
2.6. Двойная экспоненциальная модель охлаждения ядра трупа в условиях линейно изменяющейся внешней температуры .....	104
<b>ГЛАВА 3. РЕГРЕССИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУПА</b> .....	111
3.1. Основы линейного регрессионного моделирования методом наименьших квадратов .....	111

3.2. Двухфакторная регрессионная модель установления давности наступления смерти .....	119
3.3. Параболическая регрессионная модель охлаждения трупа ....	123
3.4. Нелинейное регрессионное моделирование охлаждения трупа .....	125
3.5. Регрессионный подход к оценке индивидуальных констант охлаждения и температурного плато в модели Henßge .....	130
<b>ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУПА .....</b>	<b>134</b>
4.1. Неявные функции и численные методы их решения .....	134
4.2. Метод касательных Ньютона .....	136
4.3. Решение методом Ньютона неявных функций, основанных на законе охлаждения Ньютона-Рихмана .....	139
4.4. Решение методом Ньютона двойной экспоненциальной модели Marshall-Noare .....	140
4.5. Решение методом Ньютона двойных экспоненциальных моделей Henßge .....	141
4.6. Решение двойных экспоненциальных моделей методом хорд .....	142
<b>ГЛАВА 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВНОСТИ НАСТУПЛЕНИЯ СМЕРТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ СЕРИИ WARM BODIES .....</b>	<b>145</b>
5.1. Краткая характеристика приложений, предназначенных для определения давности наступления смерти .....	145
5.2. Приложение Warm Bodies NRN .....	148
5.3. Приложение Warm Bodies MHR .....	151
5.4. Приложение Warm Bodies HR .....	153
5.5. Приложение Warm Bodies ANBG .....	157
5.6. Приложение Warm Bodies MNNH .....	159
<b>ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ПРОЦЕССЕ ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУПА .....</b>	<b>161</b>
6.1. Типы передачи тепла при охлаждении трупа .....	161
6.2. Основы математического моделирования теплопроводности .....	165
6.3. Математические модели теплообмена при охлаждении тела .....	173
6.4. Математическое моделирование охлаждения трупа методом конечных элементов .....	180
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>184</b>
<b>СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ .....</b>	<b>185</b>
<b>СПИСОК ОСНОВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И КОНСТАНТ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУПА .....</b>	<b>185</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>186</b>

*Научное издание*

**Недугов Герман Владимирович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОХЛАЖДЕНИЯ ТРУПА**

Выпускающий редактор Г. А. Кайнова

*Отпечатано с готового оригинал-макета.*

Подписано в печать 10.10.2021. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 23,25.  
Тираж 100 экз. Заказ 1370.

Издательство «Бук». 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.  
Отпечатано в типографии «Т8 Издательские Технологии», г. Москва, Волгоградский пр-т, д. 42, корп. 5